2018/4/4
أربعاء

الموضوع: محاضرة 3

5) حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بطريقة النشر

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية في هذا الشكل

$w'' + p(Z)w' + q(Z)w = 0$ ... [1] حيث w الدالة المجهولة و Z المتحول المستقل.

5-1) تعريف النقاط العادية والنقاط الشاذة للمعادلة التفاضلية [1]:

النقطة العادية: نقول بالتعريف عن $Z = Z_0$ أنها نقطة عادية للمعادلة [1]، إذا كانت كل من الدالتين $p(Z)$ و $q(Z)$ تحليليتين عند تلك النقطة (أي مستمرتين).

ونقول عن كل نقطة غير عادية أنها نقطة شاذة للمعادلة.

مثال: في المعادلة التالية

$$\left[w'' + \frac{Z+2}{Z-1}w' + \frac{Z}{(Z+1)^2}w = 0\right]$$

حيث نلاحظ أن $p(Z) = \frac{Z+2}{Z-1}$ و $q(Z) = \frac{Z}{(Z+1)^2}$

ونلاحظ أن $Z = 1$ و $Z = -1$ نقطتان شاذتان لهذه المعادلة.

وكل نقطة غير هاتين النقطتين من المستوي $\mathbb{C}$ هي نقطة عادية للمعادلة.

(اختبر الدوال)

5-2) الحل بجوار نقطة عادية

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $w'' + p(Z)w' + q(Z)w = 0$ — (1)

والشروط الابتدائية $[w(Z_0) = C_0$ و $w'(Z_0) = C_1]$ — (2)

وبفرض أن الدالتين $p(Z)$ و $q(Z)$ تحليليتان في القرص $D(Z_0, C)$

عندئذٍ يوجد حل تحليلي وحيد في $D(Z_0, C)$ من الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - Z_0)^n$$

حيث a_n ثوابت يطلب تعيينها بدلالة C_0 و C_1.

ويعطى الحل العام للمعادلة (1) في جوار نقطة العادية $Z = Z_0$ من الشكل:

$$w = Aw_1 + Bw_2$$

حيث A و B ثابتان اختياريان

w_1 و w_2 حلان خاصان للمعادلة (1)

مثال: أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية $w'' - zw = 0$ ------ (1)
في جوار النقطة $z = 0$
ثم أوجد الحل الموافق للشروط الابتدائية $[w(0) = 1$ و $w'(0) = 0]$ (2)

الحل: نلاحظ أن $p(z) = 0$ و $q(z) = -z$
والتابعان تحليليان عند النقطة $z = 0$ وبالتالي $z = 0$ نقطة عادية للمعادلة (1)
والحل يكون (تحليلي وحيد) من الشكل:

$$\left[w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right] \quad --- (3)$$

نشتق هذه العلاقة الأخيرة مرتين بالنسبة لـ z ونعوضها في المعادلة المعطاة فنجد:

$$(3) \overset{\text{بالاشتقاق}}{\Longrightarrow} w' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

$$w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

بتعويض في (1):

$$(1) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = 0$$

نبدل في المجموع الأول كل n بـ $n+2$ وفي المجموع الثاني كل n بـ $n-1$ (لتقارب الأدلة)
فيكون:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n = 0$$

الآن بإخراج الحد الأول من المجموع الأول نجد ($n = 0$)

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1}\right] z^n = 0$$

بالمطابقة مع الطرف الأيمن يكون لدينا:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

وأيضاً:

دستور تدريجي لحساب الأمثال a_n:

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}} \quad ; \forall n \geq 1$$

ومن الدستور التدريجي يكون

$$n = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{3 \times 2}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_4 = \frac{a_1}{4 \times 3}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_5 = \frac{a_2}{5 \times 4} = 0 \quad (a_2 = 0)$$

الموضوع:

$n=4 \Rightarrow a_6 = \frac{a_0}{2\times3\times5\times6}$

وهكذا ---- (ضرب ما يقابل من كل عدد)

. ملاحظة: أن الثوابت جميعها حيث $a_n \; (n=0,1 \ldots)$ تتعين بدلالة الثابتين a_0 , a_1 في

وبالتالي الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$(3) \Rightarrow w = a_0\left[1+\frac{1}{2\times3}Z^3+\frac{1}{2\times3\times5\times6}Z^6+\ldots\right]+a_1\left[Z+\frac{1}{4\times3}Z^4+\ldots\right]$$

في هذا المثال الحلول الخاصة تكون هي:

$$w_1 = 1+\frac{1}{2\times3}Z^3+\frac{1}{2\times3\times5\times6}Z^6+\ldots$$

$$w_2 = Z+\frac{1}{3\times4}Z^4+\ldots$$

. ولإيجاد الحل الخاص الموافق للشروط الابتدائية نبدل في عبارة الحل العام (4)

. كل Z بـ 0 فنجد (ما يسمى بملاءمة الحل العام مع الشروط الابتدائية):

$$w(0)=1 = a_0[1+0+0+\ldots]+a_1[0+0+0\ldots]$$

إذن $\boxed{a_0=1}$

ولحساب a_1 نشتق الحل (4) مرة بالنسبة لـ Z:

$$w' = a_0\left[0+\frac{1}{2}Z^2+\frac{1}{2\times3\times5}Z^5+\ldots\right]+a_1\left[1+\frac{1}{3}Z^3+\ldots\right]$$

$$w'(0)=0 = a_0[0]+a_1[1+0+0+\ldots]$$

$$\boxed{a_1=0}$$

. والحل الموافق يكون:

$$(4) \Rightarrow w = w_1 = 1+\frac{Z^3}{2\times3}+\frac{Z^6}{2\times3\times5\times6}+\ldots$$

وهو المطلوب

(5,3) - الحل في جوار نقطة شاذة نظامية

تعريف: نقول عن النقطة $Z=Z_0$ أنها نقطة شاذة نظامية للمعادلة (1) إذا كان

. كل من الدالتين $(Z-Z_0)\,p(Z)$ و $(Z-Z_0)^2 q(Z)$ تحليليتان

. عند هذه النقطة فيما عدا ذلك تكون النقطة شاذة غير نظامية.

(مهم على ترم الخطي)

وفي هذه الحالة يوجد حل واحد على الأقل للمعادلة التفاضلية:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad \text{---} \quad (1)$$

ويحقق الشروط الابتدائية التالية:

$$[w(z_0) = c_0 \quad , \quad w'(z_0) = c_1] \quad \text{---} \quad (2)$$

في جوار النقطة الشاذة النظامية قابل للنشر (تحليلي) على الشكل:

$$\left[w = (z - z_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right]$$

بحيث تكون السلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

متقاربة على الأقل في المجال $|z - z_0| < \alpha$

ولإيجاد الحل في جوار النقطة الشاذة النظامية فإننا ننشر حسب دستور (تايلور - لوران) كلاً من الدالتين:

$$(z - z_0)^2 q(z) \quad , \quad (z - z_0) p(z)$$

ونحصل منهما على الأمثال التالية:

$$q_0, q_1, q_2, \ldots \quad , \quad p_0, p_1, p_2 \ldots$$

ويمكن تلخيص الحل في جوار النقطة الشاذة النظامية في الخطوات التالية:

(1) نفرض أن الحل الخاص من الشكل:

$$w = (z - z_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

نشتق هذه المعادلة مرتين ونعوضها في المعادلة (1)

بجعل أمثال أقل قوة لـ z (عندما $n = 0$) مساوياً للصفر فإننا نحصل على المعادلة:

$$F(\lambda) = \lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0$$

وهي تسمى المعادلة المميزة للمشتق وتمتلك في الحالة العامة جذرين (λ_1 , λ_2)

(2) إذا كانت هذه الجذور تختلف عن بعضها بعدد غير صحيح أي $(\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z})$ فيكون الحل العام للمعادلة (1) من الشكل:

$$w = A(z - z_0)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + B(z - z_0)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

حيث A و B ثابتات اختيارية.

③ وإذا كان الفرق بين الجذرين ينتمي إلى Z عدداً صحيحاً أي $(\lambda_1 - \lambda_2 \in Z)$
فإننا نستعمل الحل الخاص، $w_1 = (Z - Z_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - Z_0)^n$ (تشيح)
أو تخفيض رتبة المعادلة {1} وذلك بإجراء التحويل التالي،

$$\boxed{w_2 = w_1 \cdot u}$$

حيث u دالة مجهولة يطلب تعيينها.
وعندها الحل العام للمعادلة {1} هو يكون،

$$w = A w_1 + B w_2$$

حيث A و B ثابتان اختياريان.

مثال (1) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية،

$$Z^2 (1+Z) w'' - Z(1+2Z) w' + (1+2Z) w = 0 \quad \ldots \quad ①$$

في جوار $Z = 0$.

الحل بعد تقسيم المعادلة المعطاة طرفيها على أمثال w'' $(Z^2(1+Z))$ فنجد أن،

$$w'' - \frac{1+2Z}{Z(1+Z)} w' + \frac{(1+2Z)}{Z^2(1+Z)} w = 0$$

نلاحظ:

$$p(Z) = -\frac{1+2Z}{Z(1+Z)}$$

$$q(Z) = \frac{1+2Z}{Z^2(1+Z)}$$

ونلاحظ أن،

$$Z p(Z) = -\frac{1+2Z}{1+Z}$$

$$Z^2 q(Z) = \frac{1+2Z}{1+Z}$$

هما دالتان تحليليتان عند النقطة $Z=0$ وبالتالي $Z=0$ نقطة شاذة
منتظمة للمعادلة المعطاة ① وعليه الحل يكون من الشكل (عند جوار $Z=0$)

$$w = Z^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^{n+\lambda}$$

نشتق مرتين العلاقة الأخيرة (صيغة الحل المفروض) بالنسبة لـ Z ونبدل في المعادلة التفاضلية
المعطاة ① ثم تقسيم طرفيها على (Z^{λ}) كما يلي،

$Z^{\lambda} \xrightarrow{\text{بالاشتقاق بالنسبة لـ } Z} w' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n Z^{n+\lambda-1}$

$$w'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n Z^{n+\lambda-2}$$

بالتعويض في ①:

$$(Z^2+Z^3)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n Z^{n+\lambda-2} + (-Z-2Z^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n Z^{n+\lambda-1} + (1+2Z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^{n+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[(n+\lambda)(n+\lambda-1)-(n+\lambda)+1]a_n Z^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+\lambda)(n+\lambda-1)-2(n+\lambda)+2]a_n Z^{n+\lambda+1} = 0$$

وبالقسمة على Z^{λ} الطرفين نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+\lambda)(n+\lambda-1)-(n+\lambda)+1]a_n Z^{n} + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+\lambda)(n+\lambda-1)-2(n+\lambda)+2]a_n Z^{n+1} = 0 \quad (*)$$

لإيجاد المعادلة المميزة للمسلسل نجعل أمثال أقل قوة لـ Z تساوي الصفر (نضع $n=0$) كما يلي:

$$\lambda(\lambda-1)-\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0$$

$$(\lambda-1)^2=0 \quad ، \quad a_0 \neq 0$$

$$\lambda = 1$$ إذن لها جذران (جذر مضاعف).

إذن: $\lambda_1-\lambda_2=0 \in \mathbb{Z}$ إذن نستعمل الحل الخاص:

$w_1 = Z\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$ لإيجاد الحل المطلوب للمعادلة

ولإيجاد الدستور التدريجي نبدل في المجموع الثاني في (*) كل n بـ $(n-1)$ للتجانس بالأدلة.

ومن ثم نضع أمثال Z^n تساوي الصفر (في إجراء المطابقة) كما يلي:

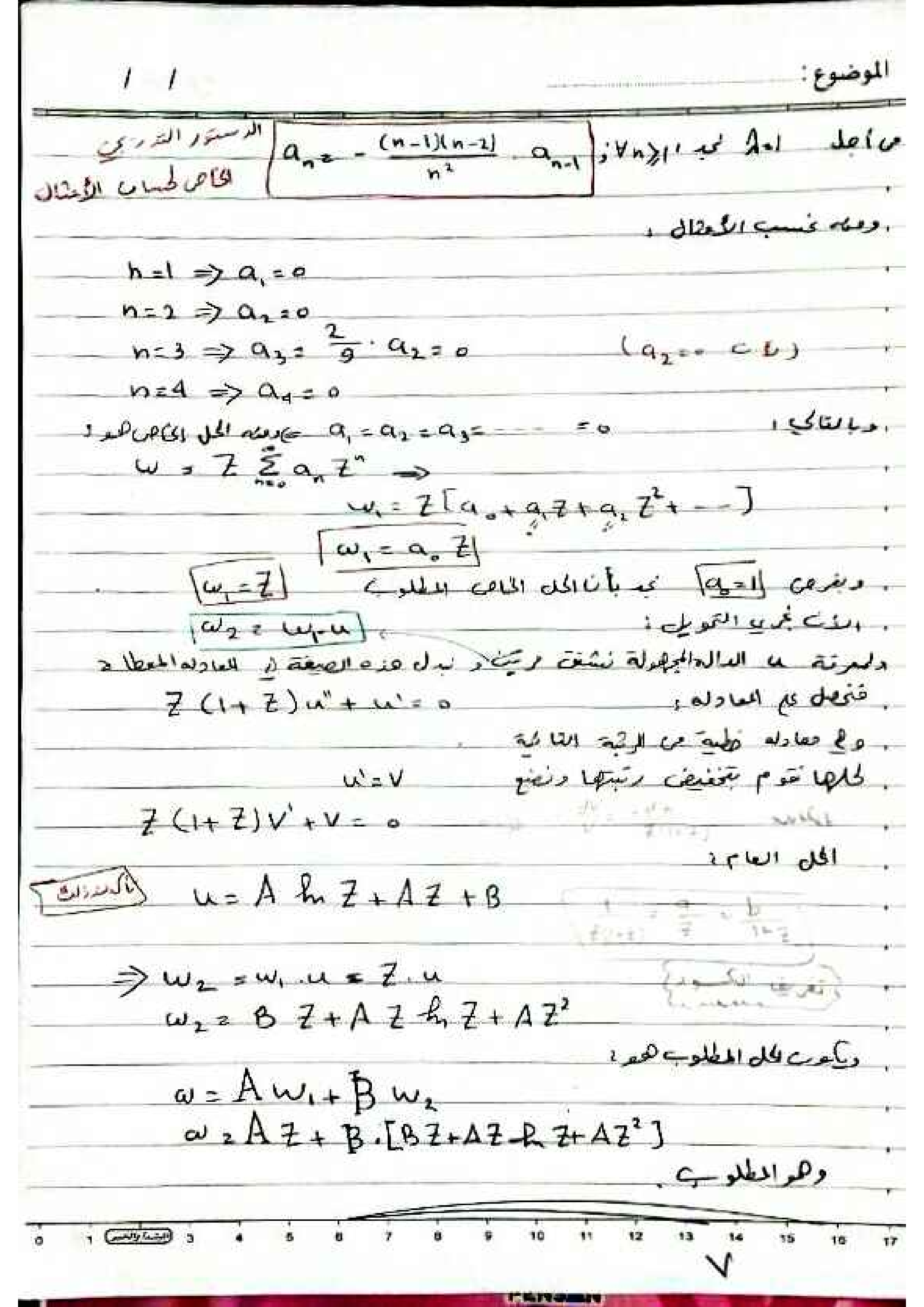
$$(*) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[(n+\lambda)(n+\lambda-1)-(n+\lambda)+1]a_n Z^n + \sum_{n=1}^{\infty}[(n-1+\lambda)(n+\lambda-2)-2(n-1+\lambda)+2]a_{n-1}Z^n$$

ومنه بإخراج عامل مشترك في أمثال الحد الثاني $(n+\lambda-1)$

ويكون الدستور التدريجي:

$$a_n = -\frac{(n+\lambda-1)(n+\lambda-4)+2}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)-(n+\lambda)+1}\, a_{n-1} \quad ، \forall n \geq 1$$

[illegible]



الموضوع: / /

من أجل $\lambda=1$ نجد، $\forall n\geq 1$: $a_n = -\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\cdot a_{n-1}$ الدستور التدريجي الخاص لحساب الأمثال

ومنه نحسب الأمثال:

$n=1 \Rightarrow a_1=0$

$n=2 \Rightarrow a_2=0$

$n=3 \Rightarrow a_3=\frac{2}{9}\cdot a_2=0$ $(a_2=0$ لأن$)$

$n=4 \Rightarrow a_4=0$

وبالتالي: $a_1=a_2=a_3=\dots=0$ ومنه الحل الخاص الأول:

$w = Z\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \Rightarrow$

$w_1 = Z[a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots]$

$\boxed{w_1 = a_0 Z}$

وبفرض $\boxed{a_0=1}$ نجد بأن الحل الخاص المطلوب $\boxed{w_1=Z}$.

الآن نجري التحويل: $\boxed{w_2 = w_1 u}$

ولمعرفة u الدالة المجهولة نشتق مرتين ونبدل هذه الصيغة في المعادلة المعطاة فنحصل على المعادلة:

$Z(1+Z)u'' + u' = 0$

وهي معادلة خطية من الرتبة الثانية.

لحلها نقوم بتخفيض رتبتها ونضع $u'=V$

$Z(1+Z)V' + V = 0$

الحل العام:

$u = A\ln Z + AZ + B$ (بالتكامل)

$\Rightarrow w_2 = w_1 \cdot u = Z\cdot u$

$w_2 = BZ + AZ\ln Z + AZ^2$

ويكون الحل المطلوب هو:

$w = Aw_1 + Bw_2$

$w = AZ + B\cdot[BZ + AZ\ln Z + AZ^2]$

وهو المطلوب.